Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio 2004

Nombre: ______________________________

Carnet: ________________ Sección: _____

MA-1123 DE HONOR— Primer parcial , 2004 —

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.

1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

   i) Calcule dim Im $\tilde{A}$ donde $\tilde{A} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es la función lineal asociada a la matriz A. Encuentre una base de esta imagen.

   ii) Calcule dim $N(\tilde{A})$ y encuentre una base de $N(\tilde{A})$

   iii) Considere el sistema de cuatro ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_4 \end{pmatrix} \qquad (^*)$$

   y explique (usando i y ii) para cuáles vectores $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_4 \end{pmatrix}$ el sistema (*) tiene solución y en estos casos, describa completamente el conjunto de soluciones.

2. Considere las rectas l_1 y l_2 cuyas ecuaciones paramétricas son

$$l_1 \begin{cases} \xi_1 = 1+\tau \\ \xi_2 = 1-\tau \\ \xi_3 = \tau \end{cases} \qquad l_2 \begin{cases} \eta_1 = z+\lambda \\ \eta_2 = \lambda \\ \eta_3 = 1-2\lambda \end{cases}$$

   i) Diga si se cortan y en ese caso halle el punto de intersección
   ii) Diga si existe un plano que contiene a las dos rectas y en ese caso encuentre una ecuación implícita para dicho plano.

3. Sea E un espacio vectorial finitamente generado y sean S y T, subespacios de E. Demuestre que si dim $S +$ dim $T >$ dim E entonces existe un vector $x \neq 0$ en la intersección $S \cap T$.

4. Sea $f : E \longrightarrow E$ una función lineal tal que $f \circ f \circ f$ es la función nula: $f \circ f \circ f = 0$.

   i) Demuestre que si $f(x) = \lambda x$ entonces necesariamente $f(x) = 0$.

   ii) Demuestre que $g = id + f$ tiene inversa

   Sugerencia: Pruebe, por ejemplo que $N(g) = \{0\}$